第64卷 第4期 天 文 学 报 Vol. 64 No. 4
2023年7月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Jul., 2023

doi: 10.15940/j.cnki.0001-5245.2023.04.007

基于智能优化算法的小天体初轨确定*

刘 欣[1,2,3†] 侯锡云[1,2,3‡] 刘 林[1,2,3] 甘庆波[4] 杨志涛[4]

(1 南京大学天文与空间科学学院 南京 210023)
(2 南京大学空间环境与航天动力学研究所 南京 210023)
(3 教育部现代天文与天体物理重点实验室 南京 210023)
(4 中国科学院国家天文台 北京 100101)

摘要 经典的初轨确定方法包括Laplace方法和Gauss方法以及它们的各种变化形式. 除这些经典方法之外, 基于当今光学观测数据的特点, 学者们也陆续提出了一些其他的初轨确定方法, 包括双r (目标距离观测者的距离)方法和可行域方法. 双r方法的一种实现方式是通过猜测某两个时刻(通常是定轨弧段的首、末时刻)目标离观测者的距离, 结合观测者在空间中的位置矢量, 即可求解相应的Lambert弧段作为目标轨道的初始猜测. 进一步, 以其他观测时刻的RMS (Root Mean Square)为优化变量可以改进初始猜测从而确定初轨. 可行域方法则是针对一组初始观测参数(包括赤经、赤纬及其变率), 根据一些初始假设将目标(离观测者的)距离及其变率约束在可行域内, 并通过三角划分逐步逼近的方式寻找到使观测RMS最小的猜测解. 针对一系列模拟观测数据以及实测数据, 将智能优化算法(粒子群算法)应用于这两种初轨方法, 并将结果与改进的Laplace算法的结果进行比较. 由于双r方法不仅可以用于短弧定轨还可用于长弧关联, 所以进一步给出了针对长弧段数据的关联结果.

关键词 天体力学, 小天体, 方法: 数值

中图分类号: P135; **文献标识码**: A

1 引言

通常来说, 近地天体的轨道确定包括初轨确定和精密定轨两个步骤, 初轨确定是利用较少的光学或雷达观测资料, 为精密定轨提供轨道初值. 初轨确定的结果越好, 精密定轨的过程越容易收敛. 一般来说, 光学观测资料包括目标的赤经和赤纬, 而随着观测技术的发展, 出现了光子计数的探测装置, 通过这种装置得到的原始数据, 除角度信息外还可获得角度变化率信息, 在很多情况下, 即使是短弧段也能得到角度的二阶变率信息[1]. 部分近地天体还有雷达观测资料(时延和多普勒频移), 但在本文工作中, 我们只考虑基于近地天体光学观测资料的初轨确定问题.

从1780年Laplace方法被提出至今, 经典的初轨计算方法主要有Laplace、Gauss、Escobal (双r法, r是目标距离观测者的距离)方法以及它们的衍生方法. Laplace方法和Gauss方法都是对3组光学观测资料进行公式推导, 最终都会退化为一个八阶方程的求解. 对于该方程, Charlier[2]曾指出Laplace定初轨的方法给出的解有时并不唯一, Gronchi指出此问题对Gauss定初轨方法同样存在[3]. 一种改进Laplace方法[4]避开了对八阶方程的

2022-05-23收到原稿, 2022-08-16收到修改稿

*国家自然科学基金项目(12233003)和空间碎片与近地小行星防御科研项目(KJSP2020020205)资助

†liuxin328@smail.nju.edu.cn

‡houxiyun@nju.edu.cn

求解, 而是采用数值迭代的方法求解"线性"表达形式的非线性方程组. 1965年Escobal[5]提出双r方法, 之后Gooding[6]和Briggs等[7]分别对双r方法进行了改进. 双r方法的本质都是假设已知两组观测资料的径向信息(目标与观测者的距离)即可根据其余的观测资料对这两组径向信息进行修正. Briggs等[7]提出的方法借助了轨道积分方程, 而Gooding[6]借助了求解Lambert弧段的方法. 除此之外, 还有多种不同情况下不同方式的改进方法, 譬如Zeinalov[8]在只考虑圆轨道的情况下提出了没有时间信息情况下的解决方案.

近现代由于观测技术提高, 出现了大量没有归类的极短弧段, 此时将经典的定初轨方法直接应用于单个极短弧段通常难以奏效, 不能获得有效的轨道信息. 基于当今光学观测资料的特点(有较为准确的角度变率信息), Milani等[9]针对小天体提出了可行域方法, 此后Tommei等人又将此方法应用到近地空间目标的初轨确定问题, 并推广到雷达类型观测资料[10]. 以光学资料为例, 这种方法采用的基本观测集(TSA—Too Short Arc)除了两个角度之外还包含它们的变率. 对一个TSA, 根据一定约束假设可以确定可行域. 通过对两个TSA的可行域进行关联可以进一步确定一条初始轨道[11]. 在不同应用情况下, 学者们给出了不同的限制, 比如Maruskin等[12]限制了近地点和远地点, DeMars等[13]又根据具体情况给出了半长径和偏心率的限制. 值得一提的是, 另一种基于两个TSA的初轨确定方案是直接借助能量积分和角动量积分求解[14–15].

智能计算也有人称之为"软计算", 是人们受自然(生物界)规律的启迪, 根据其原理, 模仿求解问题的算法. 智能优化算法有效解决了在多变量多约束情况下的寻优问题, 常用的有退火算法、遗传算法、粒子群算法等. 有关学者已将智能优化算法融入了初轨计算中. 王雪莹等人将粒子群优化算法和可行区域相结合, 不再将可行区域进行三角化, 而是直接利用粒子群算法对天基短弧观测数据进行全局寻优, 提高了计算效率[16]. Ansalone等人将遗传算法和双r方法相结合, 对极短弧段天基观测数据下的空间目标轨道参数进行估计, 将观测弧段内首末时刻的视向距离作为优化参数, 通过求解兰伯特问题来确定初始时刻的轨道参数[17]. Hinagawa等人采用遗传算法利用地基光学系统对短弧段内的地球同步轨道(Geostationary Orbit, GEO)目标进行轨道确定, 将轨道根数分为两组作为优化变量分别进行求解[18], 李鑫冉等人也采用了遗传算法优化求解了空间目标的极短弧定轨问题, 这些工作同样选择了轨道根数而非视向距离作为优化参数[19–22]. 此外, 李鑫冉等人还针对近地小行星, 采用进化算法进行了初轨计算, 同样也是选择初始轨道根数作为优化参数, 并提出对于偏心率大的天体需要一定程度分区域寻找最优解[23].

本文将考察近地小天体的初轨确定, 针对偏心率较大(约为0.6)的近地小天体Toutatis (编号4179), 采用两种方法—可行域方法以及双r方法, 利用粒子群算法针对优化变量进行全局寻优, 同时给出了协方差矩阵的估算方法. 考虑到在不同场景下采用的弧段情况不同, 本文还分别计算不同时长和观测数目的弧段, 比较了改进Laplace方法、可行域方法以及双r方法的优劣性, 分析了不同弧段时长和观测数目对不同方法精度的影响, 试验结果显示弧段时长对于改进Laplace方法和双r方法影响较大, 而观测数目对可行域方法的影响较大. 以此为基础, 本文最后给出针对不同长度弧段进行初轨计算所应采用方法的建议.

本文在第2节简述了从经典到现代的初轨计算方法—高斯方法、改进Laplace方法、双r方法以及可行域方法. 第3节描述了与智能优化算法结合的双r方法和可行域方法, 并给出包括改进Laplace方法在内的3种方法的协方差矩阵的计算. 在第4节, 展示了本文所用的数据的处理方式以及采用3种方法针对不同弧段进行初轨计算的结果. 最后对试验结果进行了讨论和总结.

2 初轨方法简介

2.1 经典初轨确定方法

2.1.1 Gauss方法

图1是中心天体太阳S、地球E以及小天体A的相对几何构型, 其中, $\vec{r}$表示小天体相对于日心的位置矢量; $\vec{\rho}$表示小天体相对于测站的位置矢量;

$\vec{R} = (X, Y, Z)^{\mathrm{T}}$表示测站相对于日心的位置矢量; ϕ表示矢量$\vec{r}$和$\vec{R}$之间的夹角; ϵ表示矢量$\vec{R}$和$\vec{\rho}$之间的夹角. 在国际天球参考系(International Celestial Reference System, ICRS)下的测量几何满足如下关系:

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{R} . \tag{1}$$

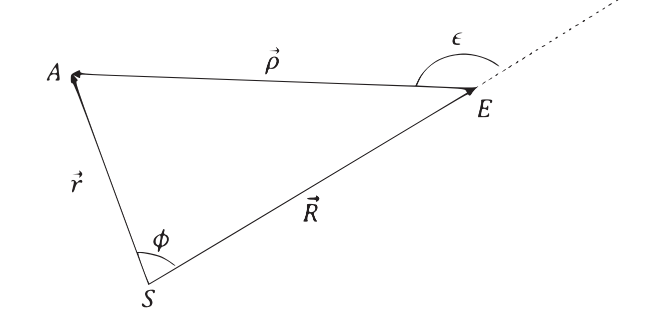


图 1 太阳、地球以及小天体的相对几何构型

Fig. 1 The relative geometric configuration of the Sun, Earth and Asteroid

考虑3组观测资料$\{(\alpha_1, \delta_1), (\alpha_2, \delta_2), (\alpha_3, \delta_3)\}$对应观测时刻$t_i\ (i = 1, 2, 3)$. 其中$\alpha_i$、$\delta_i$分别表示第$i$组观测数据的赤经和赤纬. 并有对应测站在太阳系日心天球坐标系中的位置矢量$\vec{R}_i\ (i = 1, 2, 3)$, 以$R_i\ (i=1, 2, 3)$表示其模长, 以$\vec{r}_i\ (i=1, 2, 3)$表示小天体在日心天球坐标系中的位置矢量. Gronchi等人给出了高斯方法的具体推导[15], 此处不再赘述, 直接给出得到的八阶方程

$$\begin{aligned} & r_2^8 - [A_2^2 + 2A_2(\vec{\rho_2} \cdot \vec{R_2})/\rho_2 + R_2^2]r_2^6 - \\ & 2B_2[A_2 + (\vec{\rho_2} \cdot \vec{R_2})/\rho_2]r_2^3 - B_2^2 = 0 , \end{aligned} \tag{2}$$

其中, A_2、B_2是由已知条件组合得到的系数; r_2表示第2个观测时刻小天体位置矢量$\vec{r_2}$的模长; $\vec{\rho_2}$表示第2个观测时刻由观测站到观测目标的相对位置矢量. 利用牛顿迭代的方法即可得到该方程的解. 由于Laplace方法最终也会得到形如(2)式所示的八阶方程, (2)式通常又写成下面更普遍的形式

$$\begin{aligned} P(r_2) = & C^2 r_2^8 - q^2(C^2 + 2C\gamma\cos\epsilon_2 + \gamma^2)r_2^6 + \\ & 2q^5(C\cos\epsilon_2 + \gamma)r_2^3 - q^8 , \end{aligned}$$

其中$P(r_2)$表示关于r_2的函数, C和γ表示推导过程中的常数, $q = R_2$, ϵ_2为$\vec{\rho_2}$与$\vec{R_2}$之间的夹角; 并且有关系

$$\begin{aligned} & B_2 = -\frac{q^4}{C}, A_2 = \frac{q}{C}\gamma , \\ & C\frac{\rho}{q} = 1 - \frac{q^3}{r_2^3} . \end{aligned} \tag{3}$$

(3)式又称为动力学方程(Dynamical Equation). 这里假设$\gamma = 1$, 有

$$\begin{aligned} P(r_2) &= (r_2 - q)P_1(r_2) , \\ P_1(r_2) &= C^2 r_2^6(r_2 + q) + (r_2^2 + qr_2 + q^2) \\ & \quad [q^5 - (2C\cos\epsilon_2 + 1)q^2 r_2^3] . \end{aligned}$$

此时

$$P(0) = -q^8 < 0, \quad \lim_{r_2 \to +\infty} P(r_2) = +\infty .$$

根据笛卡尔符号法则, 可以知道该方程一定有3个正根, 由于物理性质, $r_2 = q$的根应被去掉. 另外两个根根据该表达式, 由零圈(zero circle)和限制曲线(limiting curve)将平面分为几个部分. 图2展示了零圈和限制曲线将整个平面划分不同解的区域, 零圈以外的区域表示有两个根, 零圈和限制曲线之间的区域表示一个根, 限制曲线以内表示两个根. 该部分Gronchi等[15]给出了具体推导, 这里仅仅利用该图说明求解初轨问题时会出现多解的情况.

2.1.2 改进Laplace方法

不考虑摄动的情况下, 小天体的运动方程满足

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = -\dfrac{\mu}{r^3}\vec{r} , \\ t_0 : \vec{r_0} = \vec{r}(t_0) , \quad \dot{\vec{r_0}} = \dot{\vec{r}}(t_0) , \end{cases} \tag{4}$$

其中$\mu = GM$表示关于中心天体的引力常数, G为万有引力常数, M为中心天体质量, $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)^{\mathrm{T}}$为目标天体初始时刻的位置矢量, $\ddot{\vec{r}}$表示位置矢量$\vec{r}$的两阶导数, 即该目标天体的加速度, $\dot{\vec{r}}(t)$表示在t时刻目标天体的速度. 在短弧的前提下, 该函数满足初始条件的解可以展开成时间间隔$\Delta t = t - t_0$的幂级解

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{r_0}^{[1]}\Delta t + \frac{1}{2!}\vec{r_0}^{[2]}\Delta t^2 + \cdots +$$

$$\frac{1}{k!}\vec{r_0}^{[k]}\Delta t^k + \cdots\,, \tag{5}$$

其中$\vec{r_0}^{[k]}$为$\vec{r}(t)$对t的k阶导数在t_0点的取值，即$\vec{r_0}^{[k]} = (\frac{\mathrm{d}^k\vec{r}}{\mathrm{d}t^k})_{t=t_0}$. 此时(5)式中的各阶导数$\vec{r}_0^{[k]}(k \geqslant 2)$均可由(4)式中运动方程给出，即

$$\vec{r}_0^{[k]} = \vec{r}_0^{[k]}(t_0, \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0)\,.$$

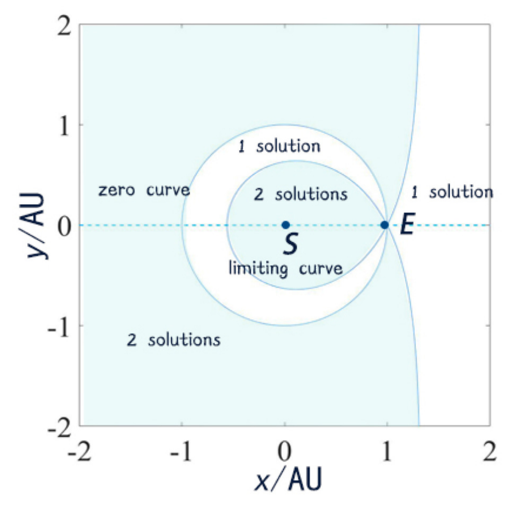


图 2　零圈、限制曲线划分解的个数示意图

Fig. 2　Schematic diagram of the number of solutions for the division of zero circle and limiting curve

同时有$\vec{r}_0^{[1]} = \dot{\vec{r}}_0$, 又可以将其展开为

$$\vec{r}(t) = F^*(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t)\vec{r}_0 + G^*(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t)\dot{\vec{r}}_0\,, \tag{6}$$

其中F^*和G^*可以通过(6)式应与(5)式相等计算得到，具体形式如下:

$$\begin{cases} F^* = 1 - \dfrac{1}{2}u_0\tau^2 + \dfrac{1}{2}u_0p_0\tau^3 + \\ \qquad \left(\dfrac{1}{8}u_0q_0 - \dfrac{1}{12}u_0^2 - \dfrac{5}{8}u_0p_0^2\right)\tau^4 + \cdots\,, \\ G^* = \tau - \dfrac{1}{6}u_0\tau^3 + \dfrac{1}{4}u_0p_0\tau^4 + \cdots\,, \end{cases} \tag{7}$$

其中$u_0 = 1/r_0^3$、$p_0 = (\vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0)/r_0^2$、$q_0 = v_0^2/r_0^2$, $\vec{r}_0$表示$\vec{r}_0$的模长，上述参数下标0都表示初始时刻t_0时的值.

将测量几何关系(1)式和(6)式结合并同时叉乘$\vec{\rho}$的单位矢量$\hat{\vec{\rho}}$可得

$$\hat{\vec{\rho}} \times \left[F^*(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t)\vec{r}_0 + G^*(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t)\dot{\vec{r}}_0\right] = \hat{\vec{\rho}} \times \vec{R}\,.$$

对于3组观测资料(α_i, δ_i), 有几何关系

$$\vec{\rho}_i = \rho_i \begin{pmatrix} \cos\alpha_i\cos\delta_i \\ \sin\alpha_i\cos\delta_i \\ \sin\delta_i \end{pmatrix} = \rho_i \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \mu_i \\ \nu_i \end{pmatrix} = \rho_i\hat{\vec{\rho}}_i\,.$$

由每组观测资料对应的测站信息$\vec{R}_i = (X_i, Y_i,\ Z_i)^{\mathrm{T}}$可以得到

$$\begin{cases} (F_i^*\nu_i)x_0 - (F_i^*\lambda_i)z_0 + (G_i^*\nu_i)\dot{x}_0 - \\ (G_i^*\lambda_i)\dot{z}_0 = \nu_iX_i - \lambda_iZ_i\,, \\ (F_i^*\nu_i)y_0 - (F_i^*\mu_i)z_0 + (G_i^*\nu_i)\dot{y}_0 - \\ (G_i^*\mu_i)\dot{z}_0 = \nu_iY_i - \mu_iZ_i\,, \\ (F_i^*\mu_i)x_0 - (F_i^*\lambda_i)y_0 + (G_i^*\mu_i)\dot{x}_0 - \\ (G_i^*\lambda_i)\dot{y}_0 = \mu_iX_i - \lambda_iY_i\,, \end{cases} \tag{8}$$

其中F_i^*和G_i^*表示第i个观测数据对应的F^*和G^*. 可以看到上式中只有两个式子是独立的，要求解$\vec{r}_0$和$\dot{\vec{r}}_0$, 需要至少3组观测资料，这里记(8)式计算出来的结果为$(\vec{r}_0^*, \dot{\vec{r}}_0^*)$. 利用(8)式不断使用下面公式进行迭代

$$\begin{cases} \vec{r}_0^{(m)} = \vec{r}_0^{(m-1)} + (\vec{r}_0^* - \vec{r}_0^{(m-1)})/(1+\epsilon)\,, \\ \dot{\vec{r}}_0^{(m)} = \dot{\vec{r}}_0^{(m-1)} + (\dot{\vec{r}}_0^* - \dot{\vec{r}}_0^{(m-1)})/(1+\epsilon)\,, \end{cases}$$

其中$\vec{r}_0^{(m)}$和$\dot{\vec{r}}_0^{(m)}$表示第m次迭代计算的值，并进行了归一化，且

$$\epsilon = \sqrt{|\vec{r}_0^{(m)} - \vec{r}_0^{(m-1)}|^2 + |\dot{\vec{r}}_0^{(m)} - \dot{\vec{r}}_0^{(m-1)}|^2}\,.$$

直到ϵ满足一定精度，迭代结束. 在实际工作中，该方法可对观测数据大于等于3组的观测弧段有效.

2.2　双r方法

测角资料确定初轨的本质困难在于缺乏径向信息(距离和速度)，双r方法的基本思想在于知道至少两个观测点的径向信息，即可确定轨道. 这种方法既可以用于极短弧(Too Short Arc)定轨，也可用于间隔时间很长的(甚至多圈)弧段资料的初轨确

定. 通常这种方式需要至少3个点的测角资料, 并一般假设第1个和最后一个测角资料的径向距离, 以此推导中间时刻观测点的径向距离, 并作为基础进行修正. 总的来说, 双r方法有两种形式, 一种与Lambert问题相结合, 一种与轨道运动积分相结合, 下面分别对两种方法进行简述.

2.2.1 与轨道积分结合的双r方法

这里将简述Briggs等[7]提出的方法, 该方法求解所谓的Gibbs问题, 又被称为BSE (Binary-Single Evolution)方法. 首先假设有3组观测资料, 根据小天体的日心位置矢量$\vec{r}_i$ $(i = 1,2,3)$共面的性质以及轨道方程, 可以推导得到6个轨道根数的表达式, 在此不进行赘述, 而平近点角M_i $(i = 1,2,3)$满足

$$M_i = nt_i + \omega\,,$$

其中n表示平运动速度, ω表示近日点辐角. 令$\omega = nT_i$, 则有$t_i = -T_i + \frac{M_i}{n}$, 即可计算得到$t_{13}$、$t_{23}$. 定义

$$t_{ij} = t_i - t_j\ (i,j = 1,2,3)\,,$$

与观测的时间可以作差. 于是该问题转化成求ρ_1和ρ_2使得目标函数满足

$$\Delta_k(\rho_1,\rho_2) = 0\,;\quad k = 1,2\,. \tag{9}$$

上式可采用Newton-Raphson公式进行迭代求解. $\Delta_1(\rho_1,\rho_2)$、$\Delta_2(\rho_1,\rho_2)$描述了$\rho_1 - \rho_2$平面上的两条曲线, 而这两条曲线相交的点, 即为该问题的解. Briggs等[7]在文章中描述了迭代初值的给出和迭代结束条件, 同时也提出了在受到扰动的情况下的修正, 这里将不再赘述.

2.2.2 与Lambert问题结合的双r方法

这里将基于Gooding[6]提出的方法进行简述. 简单来说, Gibbs问题即通过迭代求解ρ_1和ρ_2的值满足约束条件; 而在Gooding[6]提出的算法中, 仍然是迭代求解两个点的径向距离ρ_1和ρ_3的值来满足两个约束条件, 但它们的定义不同.

在猜测了ρ_1和ρ_3的值后, 可以利用Lambert问题求解该轨道, 再根据中间时刻可得到t_2时刻的位置P_c. 图3中虚曲线代表真实轨道, P_1'、P_2'、P_3'代表目标真实位置, 虚直线代表t_2时刻真实方向. P_1、P_3代表猜测的位置, 此时定义一个平面, 经过P_c垂直于t_2时刻目标位置的真实方向, 再以该平面与该方向的交点为原点建立坐标系. 令P_c在该坐标系上的投影为f和g, 坐标系的建立需使得$f > 0$并且$g = 0$. 根据该坐标系的建立可得, 当P_c是目标的真实位置时$f = 0$. Gooding[6]采用Newton-Raphson公式进行迭代修正. 这里用x、y代替ρ_1、ρ_3, 有

$$\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}, \tag{10}$$

其中f、g对x、y的偏导数通过数值差分方法给出. Gooding[6]提供的方法比Briggs等[7]提供的方法有两个优点, 首先Gooding[6]的方法收敛域更广, 采用求解Lambert弧段的方法不管提供怎样的初值都能得到一个合适的解; 其次, 如果本身的解不确定, 经典的方法与BSE方法都无法收敛. 本文将对这种方法加以简单改进以适用于智能优化算法.

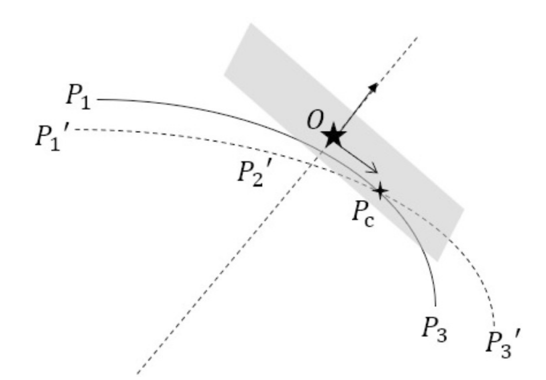


图 3 Gooding[6]采用坐标系的示意图. 星号表示P_c的位置, 虚线表示第2个观测时刻的方向. 阴影部分表示过P_c且垂直于虚线的平面. 箭头表示在新平面上所建立的坐标系.

Fig. 3 Schematic diagram of the coordinate system used by Gooding[6]. The star represents the position of P_c. The dashed line represents the direction at the second observation time. The shaded area represents the plane passing through P_c and perpendicular to the dashed line. The arrow represents the coordinate system established on the new plane.

2.3 可行域方法

得益于观测设备的改进和较大规模的巡天计划, 现有的光学观测模式已经发生改变. 大多数时

候望远镜指向天空的固定区域短时曝光几幅图片,然后再指向不同的天区进行观测. 近地天体的发现通常采用对比同一天区的几幅照片的方式, 但一般而言, 新的大型巡天设备无法对目标进行后续的跟踪观测, 只能获得一晚的数据[23], 而这么短的时长不足以利用经典的初轨确定方法进行初轨确定. 这么短的观测弧段, 也被称为极短弧. 对于短时曝光的几幅图片, 通常根据几幅照片的插值获得某个参考时刻下对应的$(\alpha,\delta,\dot{\alpha},\dot{\delta})$, 即运动目标在站心天球坐标系下的赤经和赤纬以及他们的变率, TSA对应的数据又被称为attributable. Milani等[9]提出了此名称, 用来表示此TSA是否可与已知弧段关联, 并以此为基础分析了一段TSA (或者说attributable)中所包含的信息, 并提出了可行域的概念[11], 此处将进行简单介绍. 针对于TSA中所包含的信息, 这些信息在日心坐标系下有如下关系:

$$\begin{aligned}&\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{\rho}}+\dot{\vec{R}}\,,\\&\dot{\vec{\rho}}=\dot{\rho}\hat{\vec{\rho}}+\rho(\hat{\vec{\rho}}_{\alpha}\dot{\alpha}+\hat{\vec{\rho}}_{\beta}\dot{\beta})\,,\\&\hat{\vec{\rho}}_{\alpha}=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\cos\delta\\ \cos\alpha\cos\delta\\ 0\end{pmatrix},\quad \hat{\vec{\rho}}_{\beta}=\begin{pmatrix}-\cos\alpha\sin\delta\\ -\sin\alpha\sin\delta\\ \cos\delta\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{11}$$

若要得到观测目标的轨道信息, 还需要得到径向信息, 即测距ρ和测速$\dot{\rho}$. 可行域方法则是利用目标的物理信息进行区域划分, 下面根据近地小天体的性质, 给出可行区域, 并假设近地小天体不会被地球俘获:

1. 小天体属于太阳系

$$R_{\rm A}=\{(\vec{r},\dot{\vec{r}})|E_{\rm Sun}=-\frac{\mu_{\rm S}}{r}+\frac{1}{2}\dot{r}^2<0\}\,;$$

2. 小天体不会被地球俘获

$$R_{\rm B}=\{(\vec{r},\dot{\vec{r}})|E_{\rm Earth}=-\frac{\mu_{\rm E}}{r_e}+\frac{1}{2}\dot{r_{\rm E}}^2>0\}\,;$$

3. 与地球距离超过地球希尔范围

$$R_{\rm C}=\{(\vec{r},\dot{\vec{r}})|r_{\rm E}>a_{\rm E}(\mu_{\rm E}/3)^{1/3}\}\,;$$

4. 与地球距离大于地球半径

$$R_{\rm D}=\{(\vec{r},\dot{\vec{r}})|r_{\rm E}>R_{\rm E}\}\,,$$

其中$\vec{r}$、$\dot{\vec{r}}$表示太阳系日心坐标系下小天体的位置、速度矢量, $E_{\rm Sun}$表示小天体在该坐标系下的能量, $\vec{r}_{\rm E}$、$\dot{\vec{r}}_{\rm E}$表示地心天球坐标系下小天体的位置、速度矢量, 而$r_{\rm E}$、$\dot{r}_{\rm E}$分别表示上述两物理量的模, $E_{\rm Earth}$表示小天体在该坐标系下的能量. $R_{\rm E}$表示地球半径, $\mu_{\rm E}=GM_{\rm E}$、$\mu_{\rm S}=GM_{\rm S}$, $M_{\rm E}$、$M_{\rm S}$分别表示地球、太阳质量, $a_{\rm E}$表示地球公转轨道的半长径. 故可行区域为

$$\Big((R_{\rm B}\bigcap\bar{R_{\rm C}})\bigcup R_{\rm C}\Big)\bigcap R_{\rm A}\bigcap R_{\rm D}\,.$$

最后将可行区域三角化, 每个三角区域的顶点都能给出$(\alpha,\delta,\dot{\alpha},\dot{\delta},\rho,\dot{\rho})$的信息, 如果近地小天体在该顶点, 则由此信息可以给出近地小天体的状态量和轨道根数. 如果有该小天体的另一个TSA的数据, 则可进行关联以生成初始轨道的估计[11].

3 结合智能优化算法的改进

3.1 本文所用双r方法的改进

假设有NR (NR $\geqslant$ 3)组观测资料$(\alpha_m^{\rm o},\beta_m^{\rm o})$, $m=1,2,\cdots,{\rm NR}$, 其中上标o表示观测值. 假定已知第1个和第NR个观测资料的站心距离ρ_1和$\rho_{\rm NR}$, 即可得到小天体的日心位置矢量(见图1), 由此可求解兰伯特问题并计算中间各观测时刻的理论观测值$(\alpha_m^{\rm c},\beta_m^{\rm c})$, $m=1,2,\cdots,{\rm NR}$, 其中上标c表示计算值. 记每个时刻的观测残差向量为

$$\vec{y}_m=[\cos\delta_m^{\rm o}(\alpha_m^{\rm c}-\alpha_m^{\rm o}),(\delta_m^{\rm c}-\delta_m^{\rm o})]^{\rm T}\,.$$

所有残差向量记为

$$\boldsymbol{Y}=(\vec{y}_1,\vec{y}_2,\cdots,\vec{y}_{\rm NR})^{\rm T}\,.$$

记变量系统为$\boldsymbol{X}$, 在本问题中

$$\boldsymbol{X}=(\rho_1,\rho_{\rm NR})^{\rm T}\,.$$

采用双r算法的初轨确定问题即为寻找合适的$\boldsymbol{X}$使下式取得最小值

$$\min J(\boldsymbol{X})=\frac{1}{2{\rm NR}}\min\{\boldsymbol{Y}^{\rm T}\boldsymbol{Y}\}\,.\tag{12}$$

这相当于求解下式

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}} = 0\,. \tag{13}$$

引入矩阵

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{\rm NR})^{\rm T}\,, \tag{14}$$

其中,

$$\boldsymbol{b}_m = \frac{\partial \vec{y}_m}{\partial \boldsymbol{X}}\,.$$

(13)式可以简记为

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{1}{\rm NR}\boldsymbol{Y}^{\rm T}\boldsymbol{B} = 0\,. \tag{15}$$

记(15)式的解为$\boldsymbol{X}^*$, 引入

$$\Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^*,\ \frac{\partial^2 J}{\partial \boldsymbol{X}^2} = \frac{1}{\rm NR}\left(\boldsymbol{B}^{\rm T}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{Y}^{\rm T}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{X}}\right)\,.$$

一个合理的假设是, 当满足(15)式时, 观测残差$\boldsymbol{Y} \to 0$, 所以

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \boldsymbol{X}^2} \approx \frac{1}{\rm NR}\boldsymbol{B}^{\rm T}\boldsymbol{B}\,.$$

考虑此近似, (15)式的迭代公式变为

$$\Delta\boldsymbol{X} = -\left(\frac{\partial^2 J}{\partial \boldsymbol{X}^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}\right)^{\rm T} = -(\boldsymbol{B}^{\rm T}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\rm T}\boldsymbol{Y}\,. \tag{16}$$

引入协方差矩阵

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Y}} = {\rm E}[\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{\rm T}] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}_2} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}_3} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}_{\rm NR-1}} \end{pmatrix}\,,$$

其中, E表示求数学期望算符. 则定轨变量$\boldsymbol{X}$的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{B}^{\rm T}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\rm T}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^{\rm T}\boldsymbol{B})^{-\rm T}\,. \tag{17}$$

考虑到NR值可能很大, 实际计算时我们可以采用

$$\boldsymbol{B}^{\rm T}\boldsymbol{B} = \sum_{m=2}^{\rm NR-1}\boldsymbol{b}_m^{\rm T}\boldsymbol{b}_m, \boldsymbol{B}^{\rm T}\boldsymbol{Y} = \sum_{m=2}^{\rm NR-1}\boldsymbol{b}_m^{\rm T}\boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{B}^{\rm T}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{B} = \sum_{m=2}^{\rm NR-1}\boldsymbol{b}_m^{\rm T}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}_m}\boldsymbol{b}_m$$

避免大矩阵的直接计算. 在计算$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}_m}$时除需考虑观测量的方差之外还需考虑来自第1个和第NR个观测时刻的角度误差贡献, 即

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}_m} = \boldsymbol{P}^{(1)}_{\boldsymbol{y}_m} + \boldsymbol{P}^{(2)}_{\boldsymbol{y}_m}\,, \tag{18}$$

其中

$$\boldsymbol{P}^{(1)}_{\boldsymbol{y}_m} = \begin{pmatrix} \cos^2\delta^{\rm o}_m\sigma^2_{\alpha_m} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\delta_m} \end{pmatrix}$$

为观测量的方差, σ_{α_m}、σ_{δ_m}表示第m组赤经和赤纬的方差. 而

$$\boldsymbol{P}^{(2)}_{\boldsymbol{y}_m} = \frac{\partial \boldsymbol{y}_m}{\partial(\alpha^{\rm o}_1, \delta^{\rm o}_1, \alpha^{\rm o}_{\rm NR}, \delta^{\rm o}_{\rm NR})}\begin{pmatrix} \sigma^2_{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{\alpha_{\rm NR}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{\delta_{\rm NR}} \end{pmatrix}\left[\frac{\partial \boldsymbol{y}_m}{\partial(\alpha^{\rm o}_1, \delta^{\rm o}_1, \alpha^{\rm o}_{\rm NR}, \delta^{\rm o}_{\rm NR})}\right]^{\rm T}$$

为第1个时刻和第NR个时刻的观测量的方差映射至中间各观测时刻的残差. 但是(17)式给出的仅仅是待估量$\boldsymbol{X}$的方差, 如需给出初始时刻的位置和速度对应的协方差矩阵$\boldsymbol{P}_1$, 则需要进一步计算. 记

$$\check{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{X}, \alpha^{\rm o}_1, \delta^{\rm o}_1, \alpha^{\rm o}_{\rm NR}, \delta^{\rm o}_{\rm NR})^{\rm T} = (\rho_1, \rho_{\rm NR}, \alpha^{\rm o}_1, \delta^{\rm o}_1, \alpha^{\rm o}_{\rm NR}, \delta^{\rm o}_{\rm NR})^{\rm T}\,,$$

则

$$\boldsymbol{P}_{\check{\boldsymbol{X}}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{\alpha_{\rm NR}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{\delta_{\rm NR}} \end{pmatrix}\,.$$

引入矩阵

$$\boldsymbol{\Gamma}=\frac{\partial(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})}{\partial\check{\boldsymbol{X}}}=\begin{pmatrix}\cos\delta_1\cos\alpha_1 & \cos\delta_{\rm NR}\cos\alpha_{\rm NR} & -\rho_1\cos\delta_1\sin\alpha_1 & -\rho_1\sin\delta_1\cos\alpha_1 & 0 & 0\\ \cos\delta_1\sin\alpha_1 & \cos\delta_{\rm NR}\sin\alpha_{\rm NR} & \rho_1\cos\delta_1\cos\alpha_1 & -\rho_1\sin\delta_1\sin\alpha_1 & 0 & 0\\ \sin\delta_1 & \sin\delta_{\rm NR} & 0 & \rho_1\cos\delta_1 & 0 & 0\\ \partial\dot{x}/\partial\rho_1 & \partial\dot{x}/\partial\rho_{\rm NR} & \partial\dot{x}/\partial\alpha_1 & \partial\dot{x}/\partial\delta_1 & \partial\dot{x}/\partial\alpha_{\rm NR} & \partial\dot{x}/\partial\delta_{\rm NR}\\ \partial\dot{y}/\partial\rho_1 & \partial\dot{y}/\partial\rho_{\rm NR} & \partial\dot{y}/\partial\alpha_1 & \partial\dot{y}/\partial\delta_1 & \partial\dot{y}/\partial\alpha_{\rm NR} & \partial\dot{y}/\partial\delta_{\rm NR}\\ \partial\dot{z}/\partial\rho_1 & \partial\dot{z}/\partial\rho_{\rm NR} & \partial\dot{z}/\partial\alpha_1 & \partial\dot{z}/\partial\delta_1 & \partial\dot{z}/\partial\alpha_{\rm NR} & \partial\dot{z}/\partial\delta_{\rm NR}\end{pmatrix}.$$

则

$$\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{P}_{\check{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{\Gamma}^{\rm T}. \quad (19)$$

矩阵$\boldsymbol{\Gamma}$中的后3行可通过动力学映射得到. 显然, (16)式成立的条件是$\boldsymbol{Y}\to 0$, 这需要较好的$\boldsymbol{x}$初始猜测值, 但这在一般情形下不能简单获得. 在本文工作中, 我们借助了具有全局优化性质的粒子群算法解决此问题. 整个双r算法初轨确定的流程分两步, 即首先用粒子群算法求解(12)式寻找全局优化解, 然后再针对此解采用(16)式逐步迭代以获得局部最优解.

3.2 本文所用可行域方法的改进

假设共有NK ($\geqslant 2$)组TSA资料

$$(\alpha_d^{\rm o},\delta_d^{\rm o},\dot{\alpha}_d^{\rm o},\dot{\delta}_d^{\rm o}),\ d=1,2,\cdots,{\rm NK}.$$

假定已知第1个观测资料的站心距离及其速度ρ_1和$\dot{\rho}_1$, 在本问题中待估量即为

$$\boldsymbol{X}=(\rho_1,\dot{\rho}_1)^{\rm T}.$$

待优化的成本函数仍旧可以表示成(12)式的形式, 但每个时刻的观测残差变为

$$\boldsymbol{y}_d=[\cos\delta_d^{\rm o}(\alpha_d^{\rm c}-\alpha_d^{\rm o}),(\delta_d^{\rm c}-\delta_d^{\rm o}),\\ \cos\delta_d^{\rm o}(\dot{\alpha}_d^{\rm c}-\dot{\alpha}_d^{\rm o}),(\dot{\delta}_d^{\rm c}-\dot{\delta}_d^{\rm o})]^{\rm T},\ \ d\geqslant 2.$$

整个求解过程与上述双r方法类似, 即首先利用智能优化算法在可行区域内全局寻优, 寻找合适的$\boldsymbol{X}$使得残差(12)式最小, 其次在局部区域采用(16)式进一步迭代求解. 与双r方法的不同之处在于矩阵$\boldsymbol{B}$的形式不同而已. 为计算待估量的协方差矩阵, 引入协方差矩阵

$$\boldsymbol{P}_Y={\rm E}[\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{\rm T}]=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}_2} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}_3} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}_{\rm NK-1}}\end{pmatrix},$$

则待估量的协方差矩阵仍旧可用(17)式计算. 同样, 对每个时刻的协方差矩阵$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}_d}$而言除需考虑该时刻该观测量自身的方差, 还需考虑来自第1个TSA的观测量的误差贡献, 即形式仍旧如(18)式所示, 其中

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}_d}^{(1)}=\begin{pmatrix}\cos^2\delta_d^{\rm o}\sigma_{\alpha_d}^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{\delta_d}^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos^2\delta_d^{\rm o}\sigma_{\dot{\alpha}_d}^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\delta}_d}^2\end{pmatrix}$$

为观测量自身的方差信息, 而

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}_d}^{(2)}=\frac{\partial\boldsymbol{y}_d}{\partial(\alpha_1^{\rm o},\delta_1^{\rm o},\dot{\alpha}_1^{\rm o},\dot{\delta}_1^{\rm o})}\begin{pmatrix}\sigma_{\alpha_1}^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{\delta_1}^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{\dot{\alpha}_1}^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\delta}_1}^2\end{pmatrix}\left[\frac{\partial\boldsymbol{y}_d}{\partial(\alpha_1^{\rm o},\delta_1^{\rm o},\dot{\alpha}_1^{\rm o},\dot{\delta}_1^{\rm o})}\right]^{\rm T}$$

为第1个TSA的方差信息映射至后续观测时刻的方差贡献. 上式中的矩阵

$$\frac{\partial\boldsymbol{y}_d}{\partial(\alpha_1^{\rm o},\delta_1^{\rm o},\dot{\alpha}_1^{\rm o},\dot{\delta}_1^{\rm o})}$$

可通过初始时刻动力学映射简单求解.

与双r方法类似, (17)式仅给出了待估量的协方差信息, 为获得初始时刻位置、速度的协方差信息, 需进一步求解, 计算公式仍如(19)式所示, 但$\check{\boldsymbol{X}}$的定义变为

$$\check{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{X}, \alpha_1^{\mathrm{o}}, \delta_1^{\mathrm{o}}, \dot{\alpha_1^{\mathrm{o}}}, \dot{\delta_1^{\mathrm{o}}})^{\mathrm{T}} = (\rho_1, \dot{\rho}_1, \alpha_1^{\mathrm{o}}, \delta_1^{\mathrm{o}}, \dot{\alpha_1^{\mathrm{o}}}, \dot{\delta_1^{\mathrm{o}}})^{\mathrm{T}} .$$

矩阵$\boldsymbol{P}_{\check{\boldsymbol{X}}}$的定义为

$$\boldsymbol{P}_{\check{\boldsymbol{X}}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\alpha_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\alpha_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\alpha}_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\delta}_1} \end{pmatrix} .$$

由此(19)式中的Jaccobi矩阵$\boldsymbol{\Gamma}$可通过(11)式几何关系求解.

3.3 改进Laplace算法的协方差矩阵计算

有NR ($\geqslant$ 3)组观测量, 引入各观测时刻的“残差”

$$\boldsymbol{y}_m = \begin{pmatrix} (F_m^* x_0 + G_m^* \dot{x}_0 - X_m)\nu_m - \\ (F_m^* z_0 + G_m^* \dot{z}_0 - Z_m)\lambda_m \\ (F_m^* y_0 + G_m^* \dot{y}_0 - Y_m)\nu_m - \\ (F_m^* z_0 + G_m^* \dot{z}_0 - Z_m)\mu_m \\ (F_m^* x_0 + G_m^* \dot{x}_0 - X_m)\mu_m - \\ (F_m^* y_0 + G_m^* \dot{y}_0 - Y_m)\lambda_m \end{pmatrix} .$$

此方法中待估量应修改为

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \dot{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix} ,$$

所有的残差向量为

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{NR}} \end{pmatrix} .$$

后续迭代公式如可行域方法和双r方法, 但对$\boldsymbol{B}$以及$\boldsymbol{\Gamma}$矩阵进行了相应变化. 定义

$$\gamma_m = -\frac{\partial \boldsymbol{y}_m}{\partial(\lambda_m, \mu_m, \nu_m)} \frac{\partial(\lambda_m, \mu_m, \nu_m)}{\partial(\alpha_m, \delta_m)} ,$$

$\boldsymbol{\Gamma}$形如

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{\mathrm{NR}} \end{pmatrix} ,$$

不难得到

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{\Gamma} \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\delta_1}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{\alpha_{\mathrm{NR}}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{\delta_{\mathrm{NR}}}^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}} . \tag{20}$$

代入(17)式即可计算待估量的协方差矩阵.

3.4 粒子群算法

在本文所作工作中, 对于每个方法所求参数的寻找, 比如双r方法中的ρ_1和ρ_{NR}, 可行域方法中的ρ_1和$\dot{\rho}_1$, 是采用粒子群算法进行直接搜寻, 使得目标函数最小. 这里简要介绍粒子群算法以及其计算步骤. 粒子群算法来源于对鸟群的群体性行为的研究, 鸟类个体受到栖息地吸引向栖息地移动, 会记住自己距离栖息地最近的位置并且和邻居共享该信息. 即每个粒子根据自己的位置和速度进行移动, 根据最优值的信息进行速度的修正. 其中对速度的修正考虑权重、加速因子的修正公式. 具体关于粒子群优化算法的计算过程如下[24].

步骤1: 假设有h维需要优化的变量, 每一个维度的大小范围为$[a_h, b_h]$, 设定的初始种群数sizepop, 即粒子数. 保证每个维度在设定的数值范围内, 生成sizepop个初始粒子, 每一个粒子即可计算得到初始适应度fitness, 在本问题中即为观测残差, 另外根据飞行最大速度限制, 同时生成该粒子对应的速度;

步骤2: 第l次迭代过程, 即第l代种群, 根据公式依次对权重、加速因子、速度以及粒子更新, 需要

考虑到的是速度更新后一旦超过速度限制范围, 偏大即取速度最大值, 偏小即取速度最小值. 而一旦粒子更新后超出初始设定范围, 重新在粒子约束范围内寻找一个随机数作为其值, 并且对于该粒子速度更新为0, 重新计算适应度. 再进行个体极值和群体极值的更新, 该次迭代计算完成;

步骤3: 记录每一代最优取值以及粒子位置记录. 重复步骤2和步骤3直到l达到设置的最大迭代次数;

步骤4: 根据记录的每一代最优值, 找到最优值以及对应的粒子, 求解结束.

对于本问题的计算, 即优化变量为需要猜测的值如ρ_1和ρ_n、ρ_1和$\dot{\rho}_1$, 适应度的计算即目标函数的计算, 而优化变量的范围、种群数和迭代次数的选取则需要根据经验和实际情况给出.

4 数据处理与试验结果

4.1 数据准备

本文中采用数据参考国际天文联合会(International Astronomical Union, IAU)所属的小天体中心(Minor Planet Center, MPC)网站的真实观测数据以及测站数据. 利用ESA (European Space Agency)维护的NEODyS (Near Earth Objects Dynamic Site)所给的小天体Toutatis (4179)的轨道信息作为积分初值预报短弧段, 给出该弧段内观测时刻对应的赤经和赤纬及其变率, 并赋以随机误差, 赤经和赤纬的误差不超过$1''$, 其变率的误差不超过$1('')\cdot \mathrm{h}^{-1}$.

4.1.1 Toutatis (04179)基本信息

表1给出了Toutatis (04179)的半长径、偏心率、对应简约儒略日以及周期的基本信息.

4.1.2 角度变率误差估计

以赤经为例, 假设采用线性方法给出观测角度的变率

$$\dot{\alpha} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} - \frac{1}{2}\ddot{\alpha}\Delta t = \frac{\alpha_2-\alpha_1}{t_2-t_1} - \frac{1}{2}\ddot{\alpha}\Delta t\,. \tag{21}$$

取一阶项近似计算, 则(最后一项为系统差)

$$\delta\dot{\alpha} = \frac{\delta\alpha_2-\delta\alpha_1}{\Delta t} - \frac{\Delta\alpha}{(\Delta t)^2}\delta(\Delta t) + \frac{1}{2}\ddot{\alpha}\Delta t\,. \tag{22}$$

因此协方差为

$$\mathrm{E}[\delta\dot{\alpha}\delta\dot{\alpha}] = \mathrm{E}\left[\frac{\delta\alpha_2-\delta\alpha_1}{\Delta t} - \frac{\Delta\alpha}{(\Delta t)^2}\delta(\Delta t) + \frac{1}{2}\ddot{\alpha}\Delta t\right] \left[\frac{\delta\alpha_2-\delta\alpha_1}{\Delta t} - \frac{\Delta\alpha}{(\Delta t)^2}\delta(\Delta t) + \frac{1}{2}\ddot{\alpha}\Delta t\right]. \tag{23}$$

假定各观测时刻都很准确(即上式中的$\delta(\Delta t)$是一小量, 在目前的时间单位系统下这是一个可接受的假设), 且假定 $\mathrm{E}(\delta\alpha_2)=\mathrm{E}(\delta\alpha_1)=0$. 则上式变为

$$\mathrm{E}[\delta\dot{\alpha}\delta\dot{\alpha}] \approx \frac{1}{(\Delta t)^2}[\mathrm{E}(\delta\alpha_2\delta\alpha_2)+\mathrm{E}(\delta\alpha_1\delta\alpha_1)] + \frac{1}{4}\ddot{\alpha}^2(\Delta t)^2\,. \tag{24}$$

在真实计算中, 赤经和赤纬残差为$1''$, 为确保赤经和赤纬变化速率的准确性, 假设两次观测之间时间差Δt约1.4 h. 而赤经和赤纬的加速度都是一个小量, 对于赤经约为$4('')\cdot\mathrm{h}^{-2}$, 与第1项量级相比可忽略不计, 则此时可估算到赤经以及赤纬变率残差约为$1('')\cdot\mathrm{h}^{-1}$. 在本文的工作中将以该值作为随机残差加入.

表 1 Toutatis (04179)基本信息. MJD表示简约儒略日, a表示半长径, e表示偏心率, T表示周期.

Table 1 Basic information of Toutatis (04179). MJD represents Modified Julian Date, a represents the semi-major axis, e represents the eccentricity, and T represents the period.

MJD	a/AU	e	T/d
59800.0	2.54	0.62	1482.68

4.1.3 测站速度计算

由于观测时的坐标系为地心天球坐标系, 而测站位置为地固坐标系下的位置, 所以会考虑地心天球坐标系与地固坐标系之间的转换, 本文采用Sofa[1]提供的程序进行坐标转换. 另外, 在计算赤经和赤纬变率时, 需要计算测站的速度信息, 而测站位置信息表达式为

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{t}} = (\mathrm{HG})^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{t}}\,,$$

[1] http://www.iausofa.org/

其中, $\hat{\boldsymbol{R}}_{\rm t}$表示在地心历元平赤道下的测站位置矢量, $\hat{\boldsymbol{r}}_{\rm t}$表示在地固系下的测站位置矢量, $({\rm HG})^{\rm T}$表示上述两坐标系之间的转换矩阵, 即包括地球自转、极移、岁差和章动. 若需要求测站速度, 则需要对上式进行求导, 而(HG)矩阵的导数由理论公式导出较复杂. 故采用数值方法—Lagrange四阶插值公式直接对计算的测角资料进行插值, 并对该插值公式进行求导, 给出测角资料的变率. Lagrange四阶插值公式如下:

$$\begin{aligned} f(x)=&\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0+\\ &\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\\ &\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_2+\\ &\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3\,. \end{aligned} \tag{25}$$

考虑观测时刻为t, 时间差Δt, 取x_0、x_1、x_2、x_3分别为$t-2\Delta t$、$t-\Delta t$、$t+\Delta t$、$t+2\Delta t$, 对(25)式进行求导, 可得

$$f'(x)=\frac{8y_3-8y_2-y_1+y_0}{12\Delta t}\,. \tag{26}$$

4.1.4 光行差计算

在进行轨道积分时, 我们采用了RKF78积分器, 由于时间长度很短, 采用力模型只考虑太阳的引力. 对于人造卫星而言, 由于与测站距离较短, 初轨确定可忽略光行差; 但是对于近地小天体而言, 与测站距离较远, 甚至可以达到1 AU, 根据观测资料t_i, 此时小天体与测站距离ρ_i, 时间修正为

$$\delta t_i=\rho_i/t\,.$$

假设ρ_i为1 AU、$\delta t_i\approx 500$ s, 如果小天体运动速度为20 km·s^{-1}, 此时造成观测角度误差约为10^{-5} rad, 相当于2″, 因此需要进行光行差修正. 实际上, 时间修正公式应该为

$$\delta t_i^{\rm true}=\frac{||\vec{r}_i(t_i-\delta t_i^{\rm true})-\vec{R}_i(t_i)||}{c}\,,$$

其中c表示光速. 上式应该迭代求解, 但是

$$\delta t_i-\delta t_i^{\rm true}=\frac{||\vec{r}_i(t_i-\delta t_i^{\rm true})-\vec{r}_i(t_i)||}{c}$$

$$\approx\frac{v_i(t_i)\delta t_i^{\rm true}}{c}\approx O(10^{-2})\,.$$

该时间差造成的角度误差约0.0001″, 可忽略不计.

4.1.5 其他说明

粒子群算法在生成种群时, 需要对优化变量进行限制, 并设置迭代次数和种群数, 对于可行域方法, 文中设置种群数为1000个, 迭代次数为300次, 视向距离变化范围为$(a_{\rm E}, 2\,{\rm AU})$, 视向距离的变率变化范围为$(-0.00593\,{\rm AU\cdot s^{-1}},\ 0.00593\,{\rm AU\cdot s^{-1}})$; 而对于双$r$方法, 设置种群数为1000个, 迭代次数为300次, 视向距离的范围为$(a_{\rm E}, 2\,{\rm AU})$.

本文所用弧段数据请见附录, 为与真实轨道值进行对比, 本文保留真实观测数据对应的时刻以及测站信息, 而其观测信息(赤经和赤纬以及其变率)由拟定轨道进行轨道积分再加上随机误差给出.

4.2 试验结果

在本部分将展示改进Laplace方法、双r方法、可行域方法共3种方法在不同弧段情形下的计算结果. 在本文中, 将少于一天观测时长、观测数目少于5的弧段定义为极短弧, 超过150 d的弧段定义为长弧段, 其余弧段定义为普通弧段. 在本工作中, 为了防止随机误差偶然影响对结果的判断, 故对每一组原始弧段数据多次加入新的随机误差, 生成不同的弧段数据再进行计算, 并比较最后结果. 另外, 为了防止由于力学模型造成的结果差异影响其结果与双r方法和改进Laplace方法的对比, 可行域方法在二体问题下进行积分.

4.2.1 第2步迭代的讨论

在本文工作中, 当采用可行域方法或双r方法时, 理论上求解过程需分两部完成. 第1步是采用智能优化算法尽可能寻找全局的优化解, 第2步是在第1步的基础上进一步采用迭代方式(参见(16)式)以期望对全局优化解进行进一步优化(即使得观测残差进一步变小). 然而我们实际的数值验证表明, 很多时候采用第2步的局部迭代反而会使得残差增大. 造成这种现象的原因是在第2步迭代的公式推导中假设$\boldsymbol{Y}\rightarrow 0$, 去掉了二阶导数项$\boldsymbol{Y}^{\rm T}\partial\boldsymbol{B}/\partial X$, 这在精密定轨中是常见的. 但在极短弧定轨中, 由于缺乏足够的信息约束轨道, 因此

$\boldsymbol{Y} \to 0$的假设可能不再成立, 也即(15)式得到(16)式过程中的假设

$$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial X} \ll \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$$

不再成立. 基于这种现象, 我们在极短弧定轨的情形下实际上仅进行了第1步并将其结果作为最终定轨结果输出.

4.2.2　极短弧段试验结果

图4和图5中展示了极短弧段的计算结果, 该弧段时长约2 h, 共4条观测数据. 这里生成了20组测试数据(每组测试数据含4条观测值, 但每组数据中的观测值施加了不同的随机差), 横坐标代表测试数据的组数, 纵坐标代表每一组测试数据计算半长径与真实半长径之差或残差RMS. 在图中未标示出利用双r方法计算无结果的情况. 在20组试验中, 改进Laplace方法都失败, 数值验算时发现会出现迭代解在两个点之间来回跳转的情况, 利用高斯方法直接求解八阶方程可以证实这种现象由上述多解问题造成.

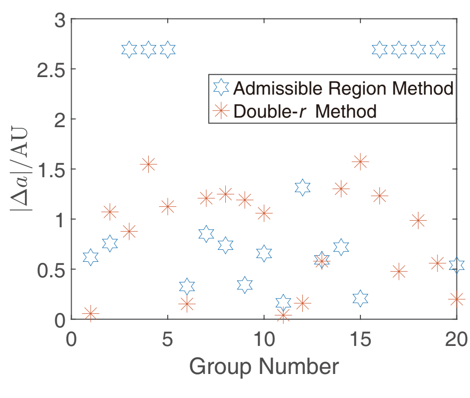


图 4　弧段1半长径计算结果

Fig. 4　The semi-major axis result of arc 1

在极短弧结合可行域方法的情形下, 本身弧段的几何状况可能会导致寻优之后给出的轨道出现半长径极大或者偏心率趋于1的情况, 此时该轨道仍在2.3节所描述的可行域内, 但显然不符合实际情况. 在本文的工作中, 我们人为添加了半长径$a < 5.2$ AU的约束. 即使如此, 可行域方法的定轨结果中有多组算例出现半长径a接近5.2 AU的情形, 但其残差(见图5)仍旧在1″以内. 在极短弧段时, 定初轨的计算结果很大一部分取决于轨道几何约束, 需要加入更多的约束才能得到更合理的结果. 总的来说, 对于极短弧段, 改进Laplace方法基本不适用, 而可行域方法和双r方法虽然大多数都能给出定轨结果, 但由图4可知这些结果可信度较低. 若需要计算获得更准确的轨道, 需要加入更多的约束.

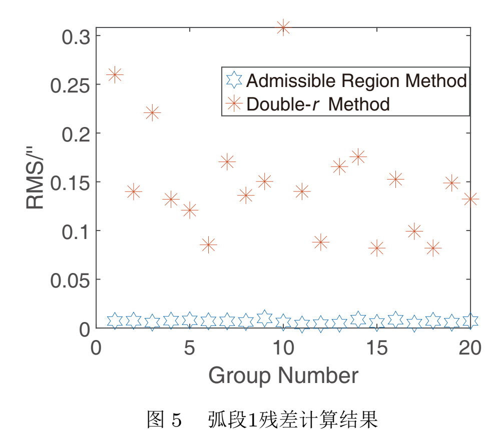


图 5　弧段1残差计算结果

Fig. 5　The RMS result of arc 1

4.2.3　普通长度弧段试验结果

图6和图7中, 考虑弧段2, 时长约5 d, 观测数目为4个, 与弧段1相比只是弧段时长增加, 生成多组数据比较计算得到的半长径与残差.

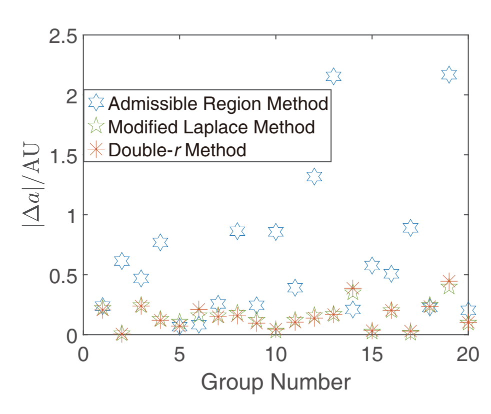


图 6　弧段2半长径计算结果

Fig. 6　The semi-major axis result of arc 2

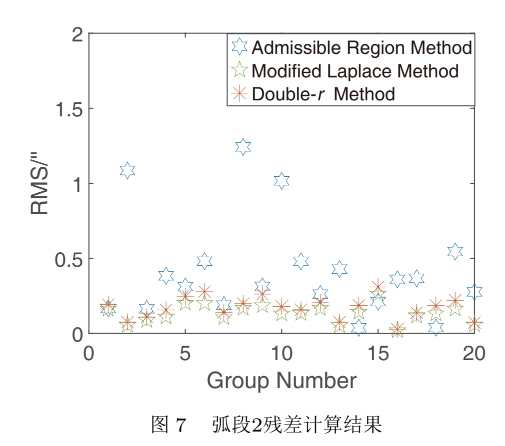


图 7 弧段2残差计算结果

Fig. 7 The RMS result of arc 2

图7中可行域方法的残差明显高于其他两种方法, 但大部分仍旧小于1″, 而图6中由改进Laplace方法和双r方法给出的计算结果与真实半长径非常吻合, 并且这两种方法计算所得的结果非常相似. 该弧段结果与弧段1进行对比, 在观测弧段时长增长的情况下, 改进Laplace方法和双r方法能给出较好的结果, 可见利用这两种方法在处理初轨计算时, 弧段不能太短; 而可行域方法的结果与弧段1近似, 其计算结果与弧长无明显关系. 对于可行域方法观测数目相同、弧长变长, 但结果却不尽人意的情况, 猜测可能是有两种原因造成的, 一是由于赤经和赤纬变率$(\dot{\alpha}_{\rm c}, \dot{\beta}_{\rm c})$误差本身较大, 二是约束不够充分, 可行域方法受到观测数目的影响更大而非观测弧长. 为验证这两种猜想, 进行了两个试验, 一是在进行粒子群优化算法全局搜索时, 不对赤经和赤纬变率进行约束, 仅仅将第1组赤经和赤纬变率作为输入, 试验发现结果并没有明显变化, 故排除第1种猜想; 二是增加观测数目, 仍旧保持弧长约5 d, 观测数目变为15, 即弧段3进行计算. 图8和9中分别展示了弧段3半长径和残差的计算结果. 对比图6和7的结果不难发现, 此时可行域方法结果明显有所改善. 另一方面双r方法出现半长径与真实值相近但残差结果较大的现象, 改进Laplace方法在3者中仍然表现最好.

其次, 考虑时长约6 d, 观测数目为22个的弧段4. 图10和11中给出弧段4的多组计算结果. 对于弧段4, 改进Laplace方法和可行域方法都能给出较好的结果. 相比于弧段2, 可行域方法计算结果有所改善, 但双r方法的残差结果反而变差, 半长径结果与弧段2近似. 双r方法产生该结果的原因将在后续进行分析.

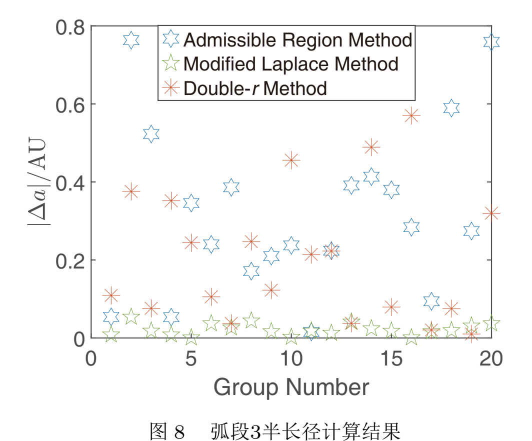


图 8 弧段3半长径计算结果

Fig. 8 The semi-major axis result of arc 3

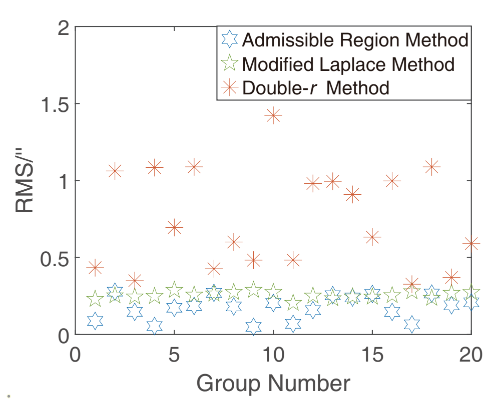


图 9 弧段3残差计算结果

Fig. 9 The RMS result of arc 3

最后, 我们考虑了弧段5, 时长21 d, 共62个观测数据点. 图12和图13中, 针对弧段5生成多组仿真观测数据, 并将定轨给出的半长径和残差与之前弧段的结果进行比较. 如图13, 首先改进Laplace方法的计算结果非常稳定, 半长径基本在一个小区域范围内波动, 说明在观测数据更多时约束更多, 计算结果能收敛到固定区域, 但此时半长径与真实结果之差(图12)相较于前几条弧段更大. 后经查证, 该组数据的时间起始于1989年1月3日, 而在8 d前的1988年12月26日, 该天体与地球发生了近距离的交会. 选取1989年1月4日开始的62个观测样本点,

总时长约19.6 d, 称为弧段6, 进行初轨计算结果如图14和15所示, 此时改进Laplace方法的半长径与真实值相差较小, 并且残差保持在1″以下.

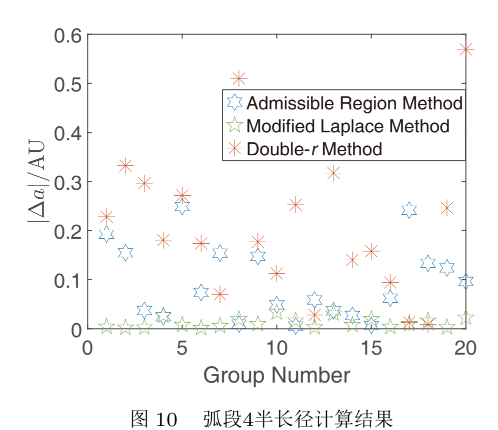


图 10　弧段4半长径计算结果

Fig. 10　The semi-major axis result of arc 4

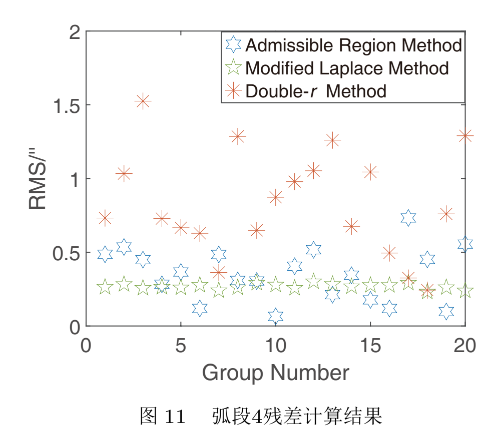


图 11　弧段4残差计算结果

Fig. 11　The RMS result of arc 4

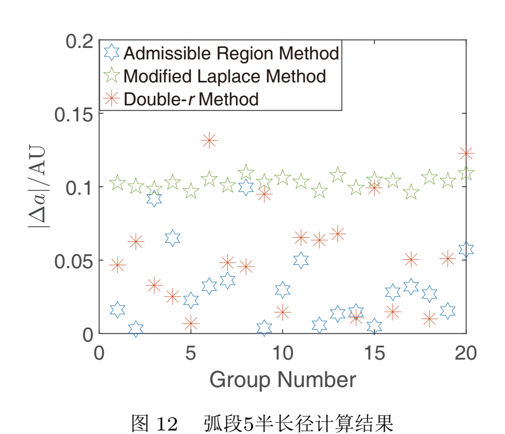


图 12　弧段5半长径计算结果

Fig. 12　The semi-major axis result of arc 5

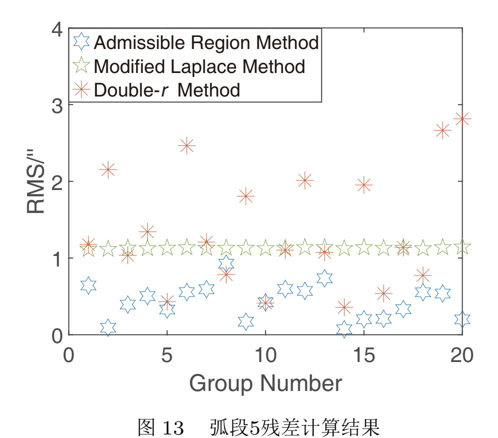


图 13　弧段5残差计算结果

Fig. 13　The RMS result of arc 5

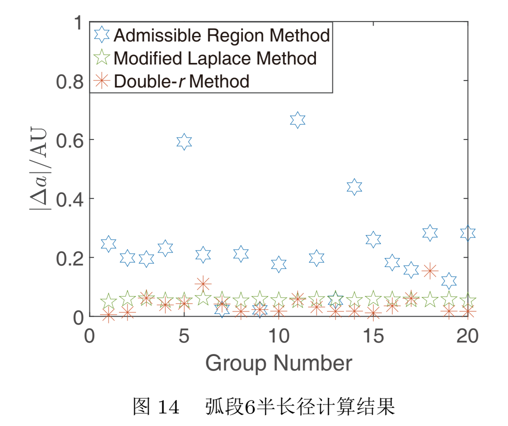


图 14　弧段6半长径计算结果

Fig. 14　The semi-major axis result of arc 6

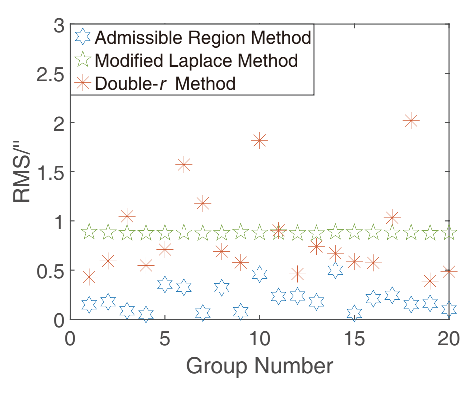


图 15　弧段6残差计算结果

Fig. 15　The RMS result of arc 6

另外, 针对于上述的弧段1–5, 随着弧段时长和观测数目的增加, 可以看到3种方法计算得到的半长径与真实半长径之差越来越小, 可见观测约束越多, 得到的轨道信息越真实. 然而此时残差结果并未表现出这种现象, 甚至某些弧段和方法的残差计算结果还会增大, 可见在初轨计算中, 残差结果只是参考项, 并未起决定性作用.

针对弧段4、5、6对于双r方法的计算结果, 其残差不理想, 但是其半长径与真实半长径相近, 这里给出双r方法关于半长径和残差收敛区域示意图如图16和17. 图16描述了计算半长径与真实半长径之差的函数$\delta a(\rho_1,\rho_2)$, 单位为AU, 图17描述了计算残差的函数RMS(ρ_1,ρ_2), 单位为$''$. 本问题即在上述两图中寻找同时满足极小的点. 如图17, 尽管展示了残差小于80$''$的区域, 但其收敛域仍然只存在于极细的直线上; 反观图16, 关于半长径极宽的收敛区域很广. 当目标函数为残差时, 很难找到全局极小点, 导致得到的残差较大, 但其位置所对应的半长径却与真实值接近.

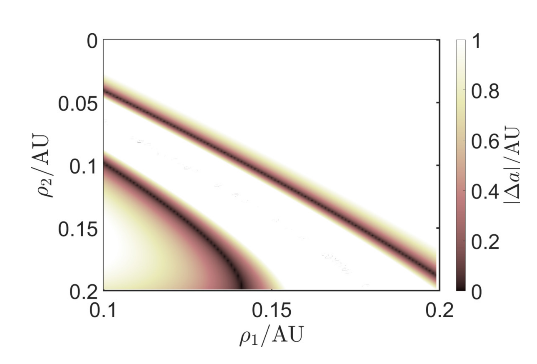


图 16　双r方法关于半长径收敛区域示意图

Fig. 16　The converging region about the semi-major axis of double-r method

5　讨论

当弧段较长时, 本文基于时间级数展开方式的改进Laplace方法适用性会受到挑战, 因为此时该级数有可能不收敛. 但双r方法仍然适用. 我们开展了几组数值验证, 结果如表2所示. 可以看到对于弧段7和弧段8, 计算出的轨道与真实轨道根数非常相似, 但是弧段9的结果比前两个弧段较差(可能是此时时间过于长, 二体问题下的轨道积分和N体问题(N-body Problem)下的轨道积分有了较大差异).

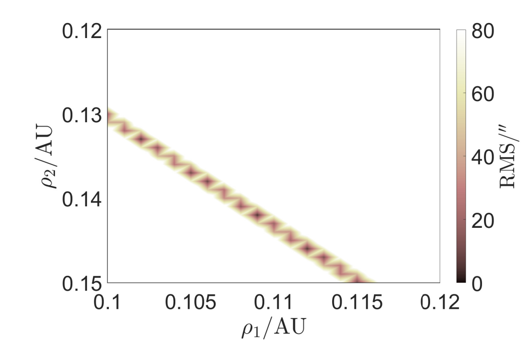


图 17　双r方法关于残差收敛区域示意图

Fig. 17　The converging region about the RMS of double-r method

一般来说, 根据定义的马氏距离可进行轨道关联的计算, 相当于是“聚类”的问题. Milani等[11]提到了可行域方法在轨道关联中的应用, Gronchi等[25]利用轨道积分进行初轨确定的同时也进行了轨道关联的工作, 也是利用了可行域方法, 除此之外还有许多学者依据可行域的思想针对绕地目标进行了轨道关联的工作. 而Gooding[6]所提出的双r方法的思想, 其实也可以在轨道关联中应用, 即将一些相隔时间较长的观测资料(数目大于2)放在一起进行初轨计算, 若残差大于阈值则不是属于同一观测目标的弧段.

6　结果

本文针对偏心率较大的天体Toutatis, 选取少于一天观测时长的极短弧段、普通长度弧段以及超过150 d时长的长弧段, 分别采用3种方法(改进Laplace方法、双r方法和可行域方法)进行初轨计算.

表 2 双r方法应用于长弧段的计算结果. a、e、i_1、Ω、ω和M分别表示轨道6要素中半长径、偏心率、轨道倾角、升交点经度、近心点幅角和平近点角.

Table 2 The results of the long arcs using double-r method. a, e, i_1, Ω, ω, and M respectively represent the six orbital elements: semi-major axis, eccentricity, inclination, longitude of the ascending node, argument of perigee, and mean anomaly.

Arc	7	8	9
Arc length/d	149.58	199.16	250.21
Number of observation data	91	91	289
Δa/AU	1.8×10^{-3}	-5.1×10^{-3}	-5.1×10^{-3}
Δe	2×10^{-4}	-0.7×10^{-3}	-5.7×10^{-3}
$\Delta i_1/°$	5.5×10^{-3}	3.6×10^{-3}	-5.7×10^{-3}
$\Delta\Omega/°$	-7.3×10^{-3}	-1×10^{-4}	5.7×10^{-2}
$\Delta\omega/°$	-5.1×10^{-3}	1.2×10^{-2}	-0.2
$\Delta M/°$	-3.01×10^{-2}	-9.9×10^{-2}	2.9

结果表明, 对于极短弧段, 尤其是观测资料少的情况, 可行域方法和双r方法都能给出残差较小的结果, 而改进Laplace方法通常无法给出计算结果, 如若需要给出符合真实情况的轨道, 需要加入更多约束进一步确定轨道; 对于普通的弧段, 我们的研究表明双r方法和改进Laplace方法的计算结果相对更依赖于观测弧段长度而非观测数目, 而可行域方法结果在观测弧段相同时, 更依赖于观测数目; 在观测数目较多时, 改进Laplace方法的结果精度和计算速度更突出; 对于较长的弧段, 双r方法具备可行性, 可在近地天体观测资料的轨道关联中有所应用.

在针对不同弧段时长和观测数目的情况下, 可以采取不同的方法进行初轨确定, 在弧段极短时选取双r方法或者可行域方法; 对于普通长度至几天长度的弧段, 选取改进Laplace方法, 此时如若选择其他方案, 观测数目较多选择可行域方法, 观测数目较少选择双r方法; 对于长弧段可以选择双r方法.

参 考 文 献

[1] DeMars K J, Jah M K, Schumacher P W. ITAES, 2012, 48: 2628

[2] Charlier C V L. MNRAS, 1910, 71: 120

[3] Gronchi G F. CeMDA, 2009, 103: 301

[4] 刘林, 胡松杰, 王歆. 航天动力学引论. 南京: 南京大学出版社, 2006: 39-43

[5] Escobal P R. Methods of Orbit Determination. New York: Wiley, 1965

[6] Gooding R H. A New Procedure for Orbit Determination Based on Three Lines of Sight: Angles Only. Technical Report Defence Research Agency, Farnborough (England), 1993: 21224

[7] Briggs R E, Slowley J W. An Iterative Method of Orbit Determination from Three Observations of a Nearby Satellite. SAO Special Report, 1959, 27: 1

[8] Zeinalov R A. AZh, 1973, 50: 201

[9] Milani A, Sansaturio M E, Chesley S R. Icar, 2001, 151: 150

[10] Tommei G, Milani A, Rossi A. CeMDA, 2007, 97: 289

[11] Milani A, Gronchi G F, Knežević Z, et al. Icar, 2005, 179: 350

[12] Maruskin J M, Scheeres D J, Alfriend K T. JGCD, 2009, 32: 194

[13] DeMars K J, Jah M K. JGCD, 2013, 36: 1324

[14] Taff L G, Hall D L. CeMec, 1977, 16: 481

[15] Gronchi G F, Dimare L, Milani A. CeMDA, 2010, 107: 299

[16] 王雪莹, 安玮, 李骏. 国防科技大学学报, 2014, 36: 146

[17] Ansalone L, Curti F. AdSpR, 2013, 52: 477

[18] Hinagawa H, Yamaoka H, Hanada T. AdSpR, 2014, 53: 532

[19] 李鑫冉, 王歆. 天文学报, 2016, 57: 66

[20] Li X R, Wang X. ChA&A, 2017, 41: 76

[21] 李鑫冉, 王歆. 天文学报, 2016, 57: 181

[22] Li X R, Wang X. ChA&A, 2017, 41: 254

[23] 李鑫冉, 赵海斌. 力学学报, 2021, 53: 902
[24] 钱锋. 粒子群算法及其工业应用. 北京: 科学出版社, 2013: 110-130
[25] Gronchi G F, Baú G, Milani A. CeMDA, 2017, 127: 211

Initial Orbit Determination Based on Intelligent Optimization Algorithm

LIU Xin[1,2,3] HOU Xi-yun[1,2,3] LIU Lin[1,2,3] GAN Qing-bo[4] YANG Zhi-tao[4]
(1 School of Astronomy and Space Science, Nanjing University, Nanjing 210023)
(2 Institute of Space Environment and Astrodynamics, Nanjing University, Nanjing 210023)
(3 Key Laboratory of Modern Astronomy and Astrophysics, The Ministry of Education, Nanjing 210023)
(4 National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101)

Abstract Classical methods for initial orbit determination (IOD) include Laplace method, Gauss method and their variations. In addition to this, based on the characteristic of optical observation data nowadays, experts propose some other IOD methods, like Double-r method and admissible region method. One of the ways to determinate the orbit through double-r method is to guess distances of the target from the observer at two epochs—usually at the first and the last one. By doing so, we can solve the Lambert problem and use its solution as the initial guess of the orbit. Furthermore, we can improve the initial guess by iterations to reduce the root mean square (RMS) of the observations. The admissible method is based on the concept of attributable (longitude, latitude and their rates). With some conceptions, the admissible region described by the range and range rate from the observer is characterized. Using triangulation we can find the nodal point that makes the RMS minimal. In our work, we apply one intelligent optimization method—the particle swarm optimization method to the two methods, based on simulated and real data, and compare the results with that of modified Laplace method. At last, we briefly discuss the possibility of applying the double-r method to the orbit link problem.

Key words celestial mechanics, minor planets, methods: numerical

附 录

表 3 各弧段初值

Table 3 The initial values of arcs

Arc	Number	$\alpha/^\circ$	$\delta/^\circ$	$\dot{\alpha}/(('') \cdot \mathrm{s}^{-1})$	$\dot{\delta}/(('') \cdot \mathrm{s}^{-1})$	Date (TDB[a])
1	1	54.888	17.836	0.12133	0.03258	1989-01-04 19:30:56.18
	2	55.010	17.868	0.12097	0.03216	1989-01-04 20:31:05.97
	3	55.056	17.881	0.12090	0.03200	1989-01-04 20:53:56.28
	4	55.176	17.912	0.12085	0.03159	1989-01-04 21:53:56.56
2	1	299.250	−20.476	−0.01549	−0.00293	1988-07-12 08:17:26.03
	2	298.925	−20.540	−0.01577	−0.00310	1988-07-13 05:57:40.91
	3	297.737	−20.768	−0.01718	−0.00307	1988-07-16 08:43:55.79
	4	297.341	−20.843	−0.01757	−0.00311	1988-07-17 08:28:26.13
3	1	49.880	16.466	0.13272	0.03920	1989-01-03 05:12:11.54
	2	49.895	16.470	0.13272	0.03914	1989-01-03 05:19:11.45
	3	54.889	17.836	0.12134	0.03259	1989-01-04 19:30:56.18
	4	55.011	17.869	0.12098	0.03216	1989-01-04 20:31:05.98
	5	55.057	17.881	0.12090	0.03200	1989-01-04 20:53:56.28
	6	55.177	17.913	0.12085	0.03159	1989-01-04 21:53:56.57
	7	58.566	18.754	0.11190	0.02726	1989-01-06 02:14:55.70
	8	58.964	18.849	0.11252	0.02601	1989-01-06 05:48:08.09
	9	60.786	19.268	0.10635	0.02415	1989-01-06 22:04:55.80
	10	60.813	19.274	0.10636	0.02406	1989-01-06 22:19:56.09
	11	61.300	19.383	0.10476	0.02446	1989-01-07 02:42:56.18
	12	61.318	19.387	0.10464	0.02439	1989-01-07 02:52:55.80
	13	61.608	19.453	0.10353	0.02324	1989-01-07 05:40:25.85
	14	61.625	19.457	0.10352	0.02317	1989-01-07 05:50:26.33
	15	64.878	20.139	0.09491	0.01917	1989-01-08 13:37:25.85
4	1	49.879	16.466	0.13272	0.03920	1989-01-03 05:12:11.54
	2	49.895	16.470	0.13272	0.03914	1989-01-03 05:19:11.45
	3	54.889	17.836	0.12134	0.03259	1989-01-04 19:30:56.18
	4	55.010	17.869	0.12098	0.03216	1989-01-04 20:31:05.98
	5	55.056	17.881	0.12090	0.03200	1989-01-04 20:53:56.28
	6	55.177	17.913	0.12085	0.03160	1989-01-04 21:53:56.57
	7	58.566	18.754	0.11190	0.02726	1989-01-06 02:14:55.70

[a]Barycentric Dynamical Time

表 3 续

Table 3 Continued

Arc	Number	$\alpha/^\circ$	$\delta/^\circ$	$\dot{\alpha}/(('') \cdot \mathrm{s}^{-1})$	$\dot{\delta}/(('') \cdot \mathrm{s}^{-1})$	Date (TDB)
	8	58.964	18.849	0.11252	0.02601	1989-01-06 05:48:08.09
	9	60.786	19.268	0.10635	0.02415	1989-01-06 22:04:55.80
	10	60.812	19.274	0.10636	0.02406	1989-01-06 22:19:56.09
	11	61.300	19.383	0.10476	0.02446	1989-01-07 02:42:56.18
	12	61.317	19.387	0.10464	0.02439	1989-01-07 02:52:55.80
	13	61.608	19.453	0.10353	0.02324	1989-01-07 05:40:25.85
	14	61.625	19.457	0.10352	0.02318	1989-01-07 05:50:26.33
4	15	64.878	20.139	0.09491	0.01917	1989-01-08 13:37:25.85
	16	64.888	20.141	0.09492	0.01913	1989-01-08 13:44:11.06
	17	65.771	20.312	0.09315	0.01804	1989-01-08 22:51:55.90
	18	65.778	20.314	0.09317	0.01802	1989-01-08 22:57:00.89
	19	65.824	20.322	0.09343	0.01783	1989-01-08 23:26:56.28
	20	67.294	20.603	0.08905	0.01612	1989-01-09 15:12:26.52
	21	67.759	20.682	0.08797	0.01660	1989-01-09 20:12:27.10
	22	67.843	20.698	0.08763	0.01633	1989-01-09 21:09:52.73
	1	49.879	16.466	0.13272	0.03920	1989-01-03 05:12:11.54
	2	49.895	16.470	0.13272	0.03914	1989-01-03 05:19:11.45
	3	54.889	17.836	0.12134	0.03259	1989-01-04 19:30:56.18
	4	55.010	17.869	0.12098	0.03216	1989-01-04 20:31:05.98
	5	55.056	17.881	0.12090	0.03200	1989-01-04 20:53:56.28
	6	55.177	17.913	0.12085	0.03160	1989-01-04 21:53:56.57
	7	58.566	18.754	0.11190	0.02726	1989-01-06 02:14:55.70
	8	58.964	18.849	0.11252	0.02601	1989-01-06 05:48:08.09
5	9	60.786	19.268	0.10635	0.02415	1989-01-06 22:04:55.80
	10	60.812	19.274	0.10636	0.02406	1989-01-06 22:19:56.09
	11	61.300	19.383	0.10476	0.02446	1989-01-07 02:42:56.18
	12	61.317	19.387	0.10464	0.02439	1989-01-07 02:52:55.80
	13	61.608	19.453	0.10353	0.02324	1989-01-07 05:40:25.85
	14	61.625	19.457	0.10352	0.02318	1989-01-07 05:50:26.33
	15	64.878	20.139	0.09491	0.01917	1989-01-08 13:37:25.85
	16	64.888	20.141	0.09492	0.01913	1989-01-08 13:44:11.06
	17	65.771	20.312	0.09315	0.01804	1989-01-08 22:51:55.90

表 3 续

Table 3 Continued

Arc	Number	$\alpha/^\circ$	$\delta/^\circ$	$\dot{\alpha}/(('') \cdot s^{-1})$	$\dot{\delta}/(('') \cdot s^{-1})$	Date (TDB)
	18	65.778	20.314	0.09317	0.01802	1989-01-08 22:57:00.89
	19	65.824	20.322	0.09343	0.01783	1989-01-08 23:26:56.28
	20	67.294	20.603	0.08905	0.01612	1989-01-09 15:12:26.52
	21	67.759	20.682	0.08797	0.01660	1989-01-09 20:12:27.10
	22	67.843	20.698	0.08763	0.01633	1989-01-09 21:09:52.73
	23	67.929	20.716	0.08717	0.01579	1989-01-09 22:10:56.09
	24	67.945	20.717	0.08741	0.01599	1989-01-09 22:19:56.95
	25	68.014	20.732	0.08731	0.01551	1989-01-09 23:08:56.28
	26	69.727	21.027	0.08309	0.01482	1989-01-10 18:41:55.99
	27	69.839	21.047	0.08230	0.01449	1989-01-10 20:03:15.00
	28	69.872	21.053	0.08214	0.01438	1989-01-10 20:27:36.02
	29	69.876	21.053	0.08221	0.01437	1989-01-10 20:30:26.23
	30	70.094	21.090	0.08175	0.01367	1989-01-10 23:09:55.90
	31	70.115	21.094	0.08164	0.01456	1989-01-10 23:17:30.36
	32	70.176	21.104	0.08182	0.01343	1989-01-11 00:10:02.23
5	33	70.705	21.192	0.07971	0.01317	1989-01-11 06:31:56.38
	34	71.893	21.380	0.07667	0.01230	1989-01-11 21:16:26.71
	35	71.908	21.383	0.07662	0.01225	1989-01-11 21:28:21.24
	36	73.016	21.567	0.07286	0.01112	1989-01-12 11:49:40.54
	37	73.025	21.568	0.07285	0.01108	1989-01-12 11:56:22.30
	38	73.027	21.554	0.07326	0.01123	1989-01-12 11:57:26.23
	39	73.039	21.558	0.07293	0.01126	1989-01-12 12:06:43.51
	40	73.058	21.561	0.07288	0.01117	1989-01-12 12:22:26.14
	41	73.087	21.565	0.07282	0.01105	1989-01-12 12:45:56.18
	42	73.093	21.566	0.07281	0.01102	1989-01-12 12:50:55.99
	43	73.094	21.566	0.07287	0.01098	1989-01-12 12:51:56.47
	44	73.097	21.565	0.07315	0.01095	1989-01-12 12:54:56.18
	45	73.166	21.577	0.07290	0.01069	1989-01-12 13:51:26.52
	46	73.224	21.585	0.07305	0.01047	1989-01-12 14:38:55.99
	47	73.767	21.661	0.07172	0.01051	1989-01-12 21:52:08.57
	48	74.739	21.798	0.06885	0.00994	1989-01-13 11:14:26.33
	49	74.844	21.813	0.06860	0.00948	1989-01-13 12:45:56.18

表 3 续

Table 3 Continued

Arc	Number	$\alpha/°$	$\delta/°$	$\dot{\alpha}/(('') \cdot s^{-1})$	$\dot{\delta}/(('') \cdot s^{-1})$	Date (TDB)
5	50	74.856	21.815	0.06859	0.00943	1989-01-13 12:56:56.28
	51	79.426	22.382	0.05673	0.00637	1989-01-16 11:22:33.62
	52	79.427	22.383	0.05673	0.00636	1989-01-16 11:24:03.48
	53	79.428	22.383	0.05673	0.00635	1989-01-16 11:25:35.93
	54	79.563	22.387	0.05667	0.00592	1989-01-16 13:46:11.16
	55	79.571	22.387	0.05668	0.00589	1989-01-16 13:54:26.23
	56	79.578	22.388	0.05670	0.00586	1989-01-16 14:02:41.30
	57	79.623	22.393	0.05686	0.00568	1989-01-16 14:49:25.85
	58	79.625	22.393	0.05687	0.00567	1989-01-16 14:51:56.18
	59	80.801	22.522	0.05350	0.00554	1989-01-17 11:15:36.31
	60	80.805	22.523	0.05348	0.00552	1989-01-17 11:20:36.12
	61	80.810	22.523	0.05347	0.00549	1989-01-17 11:25:35.93
	62	87.926	23.036	0.03938	0.00243	1989-01-23 17:21:52.15